PROBLEME

A-1/a- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[x\text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} [x\text{Log}(x+1) - x\text{Log}x] = 0 = f(0)$

par suite f est continue à droite en 0.

b- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0

• Interprétation géométrique : (C) , courbe de f ,possède une demi-tangente verticale au point O(0, 0).

2/a- la fonction $\left(x \mapsto 1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur D*

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur D*

D'où $f : x \mapsto x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur D*.

$$* \forall x \in D^*; f'(x) = \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

b- f' est dérivable sur D* et $f''(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

D'où le tableau de variationde f' sur D*

x	$-\infty$		-1	∥	0		$+\infty$
f''(x)		+		∥		−	
f'(x)		↗	0	∥		↘	0

d'après le tableau de variation de f',on voit que 0 est le minimum de f'

D'où $\forall x \in D^*$; $f'(x) > 0$.

c- D'après tout ce qui précède, le tableau de variation de f est le suivant